Министерство образования и науки Российской Федерации

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский технологический университет
«МИСиС»
Новотроицкий филиал**

Д. Д. Изаак

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

РЯДЫ

Учебно-методическое пособие

Новотроицк 2014

УДК 517
ББК 22.1
И32

Научный редактор

Бонди И. Л., *кандидат физико-математических наук*

Рецензенты:

Соколов А. А., *кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общеобразовательных и профессиональных дисциплин
Орского филиала ФГАОУ ВПО «Самарский государственный университет
путей сообщения»;*

Филоненко Т.П., *старший преподаватель кафедры математики и
естествознания филиала ФГАОУ ВПО «Национальный исследовательский
технологический университет «МИСиС»*

Изаак, Д.Д. Математический анализ. Ряды: Учебно-методическое пособие / Д. Д. Изаак. – Новотроицк: НФ НИТУ «МИСиС», 2014. – 72 с.

Данное учебно-методическое пособие написано в соответствии с программой по высшей математике и будет полезно как студентам технических направлений (140100, 140400, 151000, 150400, 240100), так и студентам направлений 080100, 080200, 230700 очной формы обучения. В пособии приведены теоретические сведения, решения типовых задач, условия задач для самостоятельной работы с ответами, а также условия расчетно-графических работ.

Рекомендовано Методическим советом НФ НИТУ «МИСиС».

Оглавление

Введение

Настоящее учебно-методическое пособие написано автором на основе многолетнего опыта работы со студентами технических направлений Новотроицкого филиала Национального исследовательского технологического университета «МИСиС».

В нем содержатся основные теоретические сведения, решения типовых примеров и задач, поясняющих теоретический материал и способствующих более глубокому его пониманию, задачи для самостоятельной работы с ответами и указаниями, условия расчетно-графических работ по разделу высшей математики «Ряды».

В пособии приведены четыре главы. Глава 1 посвящена числовым рядам, глава 2 – функциональным. В предлагаемых первых двух главах достаточно развернуто излагаются теоретические сведения: формулируются определения, демонстрируется вывод необходимых формул, предлагаются доказательства рассматриваемых теорем. Глава 3 содержит задачи, предлагаемые студентам для работы на практических занятиях (как с разбором у доски, так и для самостоятельного решения). При подборе задач были использованы различные сборники задач по высшей математике, в частности широко известные задачники Г.Н. Бермана «Сборник задач по курсу математического анализа»; И.А. Виноградовой «Математический анализ в задачах и упражнениях. Числовые и функциональные ряды»; Л.А. Кузнецова «Сборник заданий по высшей математике». Некоторые задачи являются авторскими. Глава 4 содержит условия расчетно-графических работ как для студентов очной, так и заочной форм обучения. РГР для студентов дневного отделения составлена из задач, взятых из сборника задач Л.А. Кузнецова, для студентов заочного отделения – как из задач, взятых из сборника Л.А. Кузнецова, так и авторских задач.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен обладать такими компетенциями, как способность и готовность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, способность к саморазвитию и многими другими. Все это было учтено при написании пособия.

Данное учебно-методическое пособие послужит хорошим помощником для студентов при изучении раздела математического анализа «Ряды» как под руководством преподавателя, так и самостоятельно.

ГЛАВА 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1.1 Постановка задачи

Пусть задана бесконечная последовательность чисел

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n, \ldots .$$

Определение 1.1.1. Сумма вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется числовым рядом. При этом числа a_1, a_2, …, a_n,… называются членами ряда.

Определение 1.1.2. Суммы конечного числа членов ряда

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots,\ S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ \ldots$$

называются частичными суммами ряда.

Частичные суммы образуют некоторую последовательность S_1, S_2, …, S_n, ….

Определение 1.1.3. Ряд называется сходящимся, если предел последовательности его частичных сумм существует и равен конечному числу. Этот предел называется суммой ряда:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n .$$

Определение 1.1.4. Ряд называется расходящимся, если предел последовательности его частичных сумм не существует или равен бесконечности.

Определение 1.1.5. Общим членом ряда называется n-й член a_n последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

Так, например, если сам ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$, то его общий член $a_n = \frac{1}{n^2}$.

Одна из основных задач, возникающих в связи с этими понятиями, заключается в том, чтобы выяснить поведение ряда, то есть сходится данный ряд или расходится.

Пример 1.1.1. Выяснить, сходится ли ряд $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}+...$.

Решение.

Для выяснения поведения ряда воспользуемся определением 1.1.3. Для этого найдем частичные суммы этого ряда, используя определение 1.1.2.

$$S_1=\frac{1}{2},\ S_2=\frac{3}{4},\ \ldots,\ S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}.$$

(Мы нашли сумму S_n как сумму конечного числа членов геометрической прогрессии с первым членом, равным $\frac{1}{2}$, и знаменателем, также равным $\frac{1}{2}$.)

Докажем сходимость ряда и определим его сумму по определению 1.1.3:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1.$$

Вывод: ряд сходится, его сумма равна 1.

Но не все числовые ряды также легко поддаются исследованию, основанному на определениях сходящихся и расходящихся рядов. Поэтому в дальнейшем мы познакомимся со специальным аппаратом, позволяющим исследовать на сходимость всевозможные ряды.

Рассмотрим два важных ряда.

1) Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$$

называемый обобщенным гармоническим или рядом Дирихле, сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \le 1$. Это будет доказано далее.

2) Ряд

$$b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1},$$

называемый бесконечной геометрической прогрессией со знаменателем q, сходится, если $|q| < 1$. В этом случае его сумма находится по формуле $S = \dfrac{b}{1-q}$. Если $|q| \ge 1$, ряд расходится. Это легко доказать, рассуждая так же, как в примере 1.1.1.

Примеры.

1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ будет сходящимся, так как представляет собой ряд Дирихле, где $\alpha = 2 > 1$.
2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ будет расходящимся, так как представляет собой ряд Дирихле, где $\alpha = 1 \le 1$. Этот ряд называется гармоническим рядом.
3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}$ будет сходящимся, так как является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, где $b = \dfrac{1}{3}$, $q = \dfrac{1}{3}$.
4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n$ будет расходящимся, так как представляет собой геометрическую прогрессию, где $b = 2$, $q = 2$.

1.2 Необходимый признак сходимости ряда

Теорема 1.2.1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю при $n \to \infty$.

Доказательство.

Требуется доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Очевидно, что $a_n = S_n - S_{n-1}$. Обозначим предел последовательности частичных сумм ряда при $n \to \infty$ через *S*. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \ \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Теорема доказана.

Следствие. Если общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ не имеет предела при $n \to \infty$ или имеет предел, отличный от нуля, то ряд расходится.

Следует заметить, что обратная теорема не верна, то есть, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, из этого еще не следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Например, рассмотрим два ряда:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} \qquad \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0\right);$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \qquad \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0\right).$

Следует заметить, что предел общего члена равен нулю и в первом и во втором случае. Однако первый ряд сходится, а второй расходится.

Пример 1.2.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^{10}}$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^{10}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^{10}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2}{10x^9} = \lim \frac{2^x \ln^2 2}{10 \cdot 9x^8} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x \ln^{10} 2}{10!} = \infty.$$

Вывод: ряд расходится. (В данной задаче мы применяли правило Лопиталя последовательно 10 раз.)

Пример 1.2.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n}$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1 \ne 0.$$

Вывод: ряд расходится.

1.3 Свойства числовых рядов

1. Рассмотрим ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots. \qquad (1.3.1)$$

Если отбросить несколько первых членов ряда, например a_1, a_2, …, a_N, то мы получим новый ряд

$$a_{N+1} + \ldots + a_{N+n} + \ldots. \qquad (1.3.2)$$

Эти два ряда либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся. Другими словами, конечное число начальных членов ряда не влияет на сходимость ряда.

Доказательство.

Пусть $S_n = a_1 + \ldots + a_n$, $\sigma_n = a_{N+1} + \ldots + a_{N+n}$. Тогда для любого n

$$S_{n+N} = a_1 + \ldots + a_N + a_{N+1} + \ldots + a_{N+n},$$

$$S_{n+N} = a_1 + \ldots + a_N + \sigma_n.$$

Если ряд (1.3.2) сходится, то есть существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$, то также существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+N}$, то есть ряд (1.3.1) сходится. Если ряд (1.3.2) расходится, то есть не существует конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$, то не существует и конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то есть ряд (1.3.1) расходится.

2. Если даны два ряда

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \qquad (1.3.3)$$

$$\lambda a_1 + \lambda a_2 + \ldots + \lambda a_n + \ldots \; (\lambda \ne 0), \qquad (1.3.4)$$

то они либо оба сходятся, либо оба расходятся. При этом если они оба сходятся, то сумма ряда (1.3.4) равна сумме ряда (1.3.3), умноженной на множитель λ: $S_2 = \lambda S_1$.

Это утверждение следует из того, что частичные суммы этих рядов связаны соотношением $\sigma_n = \lambda S_n$.

3. Пусть даны два ряда

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$$

Образуем третий ряд следующим образом:

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots.$$

Тогда из сходимости первых двух рядов следует сходимость третьего ряда, при этом его сумма равна сумме сумм первых двух рядов: $S_3 = S_1 + S_2$.

Действительно, $S_n^* = S_n + \sigma_n$, где S_n, σ_n, S_n^* соответствующие частичные суммы. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем требуемое.

Заметим, что из расходимости первых двух рядов не следует расходимость третьего. Например, каждый из рядов

$$1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots,$$

$$(-1) + (-1) + \ldots + (-1) + \ldots$$

расходится, однако, ряд $0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$ сходится.

1.4 Достаточные признаки сходимости положительных рядов. Признаки сравнения

Определение 1.4.1. Ряд, члены которого неотрицательны, называется положительным рядом.

Вспомним, что всякая возрастающая ограниченная последовательность имеет предел. Но очевидно, что последовательность частичных сумм положительного ряда всегда возрастает. Следовательно, для того, чтобы убедиться, что положительных ряд сходится, достаточно доказать ограниченность его частичных сумм.

Теорема 1.4.1. (Признак сравнения в обычной форме.) Если положительный ряд

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (1.4.1)$$

сходится, а члены другого положительного ряда

$$b_1 + b_2 + ... + b_n + ... \qquad (1.4.2)$$

меньше либо равны соответствующим членам первого ряда, то есть $\forall_{n \in N} (b_n \le a_n)$, то и второй ряд сходится, при этом его сумма не превосходит суммы первого ряда.

Доказательство.

Для того, чтобы доказать сходимость ряда (1.4.2) достаточно доказать, что его частичные суммы ограничены. Пусть S_n – частичные суммы ряда (1.4.1), *S*– сумма этого ряда, σ_n – частичные суммы ряда (1.4.2).

$$\sigma_n = b_1 + ... + b_n \le a_1 + ... + a_n = S_n$$

Но частичные суммы S_n ограничены числом *S*, так как $S_n \to S$ возрастая, и, следовательно: $\sigma_n \le S_n \le S$. То есть частные суммы ряда (1.4.2) также ограничены числом *S*. Следовательно, ряд (1.4.2) сходится. Переходя в неравенстве $\sigma_n \le S$ к пределу при $n \to \infty$, видим, что суммы ряда (1.4.2) не превосходят *S*. Теорема доказана.

Теорема 1.4.2. (Признак сравнения в обычной форме.) Если ряд с положительными членами

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (1.4.3)$$

расходится, а члены другого положительного ряда

$$b_1 + b_2 + ... + b_n + ... \qquad (1.4.4)$$

больше либо равны соответствующим членам первого ряда, то есть $\forall_{n \in N} (b_n \ge a_n)$, то и второй ряд расходится.

Доказательство.

Если ряд (1.4.4) сходится, следовательно ряд (1.4.3) тоже сходится по теореме 1.4.1, что противоречит условию.

Замечание. Поскольку конечное число начальных членов ряда не влияет на его сходимость, то в предыдущих теоремах условие «для всех натуральных n» можно заменить условием «для всех натуральных n, начиная с некоторого номера».

Теорема 1.4.3. (Признак сравнения в предельной форме.) Пусть даны два положительных ряда

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \qquad (1.4.5)$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \qquad (1.4.6)$$

причем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = q$. Если $0 < q < \infty$, то эти ряды либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Доказательство.

По определению предела для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N, начиная с которого $\left|\dfrac{a_n}{b_n} - q\right| < \varepsilon$. Положим $\varepsilon = \dfrac{q}{2}$. Тогда для любого $n > N$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - q\right| < \frac{q}{2},$$

$$-\frac{q}{2} < \frac{a_n}{b_n} - q < \frac{q}{2},$$

$$\frac{q}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3q}{2},$$

$$\frac{q}{2}b_n < a_n < \frac{3q}{2}b_n.$$

Если ряд с общим членом b_n сходится, то сходится и ряд с общим членом $\dfrac{3q}{2}b_n$. Тогда по признаку сравнения ряд с общим членом a_n тоже сходится. Если ряд с общим членом b_n расходится, то расходится и ряд с общим членом $\dfrac{q}{2}b_n$, тогда расходится и ряд с общим членом a_n. Теорема доказана.

Замечание. Можно показать, что если $q = 0$, то из сходимости второго ряда следует сходимость первого ряда; если $q = \infty$, то из сходимости первого ряда следует сходимость второго ряда.

Пример 1.4.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10+3(-1)^n}{n^2}$.

Решение.

Заметив, что данный ряд является положительным, применим к нему признак сравнения в обычной форме. Сравним его с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{13}{n^2}$. Этот ряд сходится, так как он является рядом Дирихле с параметром $\alpha=2>1$, каждый член которого умножен на 13. Кроме того, $\dfrac{10+3(-1)^n}{n^2}\le\dfrac{13}{n^2}$ для всех натуральных *n*. А значит, первоначальный ряд тоже сходится по признаку сравнения в обычной форме.

Пример 1.4.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+n+1}{3+2n+3n^3}$.

Решение.

Данный ряд является положительным, применим к нему признак сравнения в предельной форме. Сравним его с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. Этот ряд расходится, так как он является рядом Дирихле с параметром $\alpha=1$. Вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{3+2n+3n^3}:\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2+n}{3+2n+3n^3}=\frac{1}{3}.$$

Так как $0<\dfrac{1}{3}<\infty$, то по теореме 1.4.3 первоначальный ряд расходится.

Пример 1.4.3. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n^2}$ на сходимость с помощью признака сравнения как в обычной, так и в предельной формах.

Пример 1.4.4. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ на сходимость с помощью признака сравнения как в обычной, так и в предельной формах.

Пример 1.4.5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{n+4}{n^3+n^2+1}\right)}{2^n}$.

Пример 1.4.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2+n+1}$.

1.5 Признаки Даламбера и Коши

Теорема 1.5.1. (Признак Даламбера.) Пусть дан положительный ряд $a_1+a_2+...+a_n+...$, причем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$. Если $0\le q<1$, то ряд сходится, если $q>1$ (или $q=\infty$), то ряд расходится.

Доказательство.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, то

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_N\forall_{n\ge N}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-q\right|<\varepsilon,$$

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_N\forall_{n\ge N}\left(q-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<q+\varepsilon\right).$$

Пусть $q<1$. Выберем столь малое ε, чтобы $q+\varepsilon$ было тоже строго меньше 1. Обозначим: $q+\varepsilon=r<1$. Тогда

$$\forall_{n\ge N}\frac{a_{n+1}}{a_n}<r.$$

В частности, при $n=N$ имеем

$$\frac{a_{N+1}}{a_N}<r,\ a_{N+1}<ra_N.$$

При $n=N+1$

$$a_{N+2}<ra_{N+1},$$

а учитывая, что $a_{N+1}<ra_N$,

$$a_{N+2}<r^2a_N.$$

Рассуждая аналогично, для любого натурального k получаем

$$a_{N+k} < r^k a_N .$$

Таким образом, все члены положительного ряда

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+k} + \ldots \qquad (1.5.1)$$

меньше соответствующих членов ряда

$$a_N r + a_N r^2 + \ldots + a_N r^k + \ldots$$

Последний ряд сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $r < 1$. По признаку сравнения сходится и ряд (1.5.1). А, следовательно, сходится и данный ряд, так как он отличается от ряда (1.5.1) только несколькими добавленными членами $a_1, \ldots, a_N$.

Итак, если $q < 1$, данный ряд сходится.

Пусть теперь $q > 1$, или, в частном случае, $q = +\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1 .$$

Следовательно, сама дробь $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ начиная с некоторого номера n станет больше 1.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \; a_{n+1} > a_n .$$

То есть члены ряда возрастают с возрастанием n, и, следовательно, не стремятся к нулю. По необходимому признаку ряд расходится. Теорема доказана.

Замечание 1. В процессе доказательства мы установили, что если $q > 1$, то ряд расходится и его n-й член возрастает с ростом n, начиная с некоторого номера.

Замечание 2. Признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, и, если этого предела не существует.

Действительно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$.

Теорема 1.5.2. (Радикальный признак Коши.) Пусть дан положительный ряд $a_1+a_2+...+a_n+...$, причем $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$. Если $0\le q<1$, то ряд сходится, если $q>1$(или $q=\infty$), то ряд расходится.

Доказательство.

Так как $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$, то

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_N\forall_{n\ge N}\left|\sqrt[n]{a_n}-q\right|<\varepsilon,$$
$$\forall_{\varepsilon>o}\exists_N\forall_{n\ge N}\left(q-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon\right).$$

Пусть $q<1$. Выберем столь малое ε, чтобы $q+\varepsilon$ было тоже строго меньше 1. Обозначим: $q+\varepsilon=r<1$. Тогда

$$\sqrt[n]{a_n}<r.$$

Для любого $n\ge N$

$$a_n<r^n.$$

Ряд

$$r+r^2+...+r^n+...$$

сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $r<1$. Значит ряд

$$a_1+a_2+...+a_n+...,$$

члены которого начиная с некоторого номера N меньше соответствующих членов геометрической прогрессии, тоже сходится.

Итак, если $q<1$, ряд сходится.

Пусть $q>1$. Но если $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}>1$, то, начиная с некоторого номера N $\sqrt[n]{a_n}>1$, следовательно $a_n>1$. То есть общий член ряда не стремится к нулю, ряд расходится. Теорема доказана.

Замечание. Если $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Теорема 1.5.3. (Признак Коши в интегральной форме.) Если $f(x)$ – непрерывная убывающая положительная функция для всех $x \geq 1$, и несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots$ сходится. При этом его сумма не превышает числа $f(1) + \int_1^{\infty} f(x)dx$. Если интеграл расходится, то и ряд расходится.

Доказательство.

Несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, если $\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^{b} f(x)dx$ существует и равен конечному числу, и расходится, если этот предел равен бесконечности или не существует.

Сравним $\int_1^{n} f(x)dx$ с частичной суммой S_n. По теореме о среднем:

$$\int_1^2 f(x)dx = f(C_1)(2-1) = f(C_1),$$

где $1 < C_1 < 2$. Так как функция по условию убывает, то

$$f(2) \leq f(C_1) \leq f(1).$$

То есть

$$f(2) \leq \int_1^2 f(x)dx \leq f(1)$$

или

$$a_2 \leq \int_1^2 f(x)dx \leq a_1.$$

Аналогично можно показать, что

$$a_3 \leq \int_2^3 f(x)dx \leq a_2,$$

$$\dots$$

$$a_n \le \int_{n-1}^{n} f(x)dx \le a_{n-1}.$$

Складывая почленно все эти неравенства, получим:

$$a_2 + a_3 + \dots + a_n \le \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \dots + \int_{n-1}^{n} f(x)dx \le a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$$

или

$$S_n - a_1 \le \int_1^n f(x)dx \le S_{n-1}. \qquad (1.5.2)$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\int_1^\infty f(x)dx$ сходится. Так как $f(x)$ неотрицательная функция, то с возрастанием n $\int_1^n f(x)dx$ также возрастает и, значит, не превосходит своего предела – несобственного интеграла $\int_1^\infty f(x)dx$. Принимая во внимание неравенство (1.5.2), получим

$$S_n - a_1 \le \int_1^n f(x)dx \le \int_1^\infty f(x)dx.$$

То есть

$$S_n \le a_1 + \int_1^\infty f(x)dx.$$

Таким образом, частные суммы ряда ограничены, кроме того, они возрастают, так как ряд положительный. Следовательно, последовательность частных сумм имеет предел, следовательно, ряд сходится. При этом

$$S \le a_1 + \int_1^\infty f(x)dx.$$

2. Пусть $\int_1^\infty f(x)dx$ расходится. Из неравенства (1.5.2) следует, что

$$S_{n-1} \geq \int_1^n f(x)dx.$$

Но интеграл неограниченно растет с возрастанием n в силу расходимости несобственного интеграла. Значит растет неограниченно и частичная сумма S_{n-1}. Следовательно ряд $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ расходится. Теорема доказана.

С помощью интегрального признака Коши легко исследовать на сходимость ряд Дирихле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

При $\alpha \leq 0$ ряд расходится по необходимому признаку. При $\alpha > 0$ и при всех $x \geq 1$ функция $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ положительна, непрерывна и монотонно убывает.

При $0 < \alpha < 1$: $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^{\infty} = \infty.$

При $\alpha = 1$: $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^{\infty} = \infty.$

При $\alpha > 1$: $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^{\infty} = \left.\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right|_1^{\infty} = \frac{1}{\alpha - 1}.$

Итак, как и было сказано ранее, ряд Дирихле сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Пример 1.5.1. Исследовать на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{(n-1)!}$.

Решение.

Данный ряд является положительным, применим к нему признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)5^{n+1}}{n!} : \frac{n5^n}{(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{5(n+1)}{n^2} = 0 < 1$$

Следовательно, данный ряд сходится.

Пример 1.5.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

Решение.

Исследуем ряд по признаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n(n+1)n!}{n^n(n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e>1$$

Здесь мы воспользовались вторым замечательным пределом. Итак, по признаку Даламбера ряд расходится.

Пример 1.5.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\arccos^n\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение.

Данный ряд является положительным, применим к нему признак Коши.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\arccos^n\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\arccos\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{\pi}{2}>1$$

Следовательно, данный ряд расходится.

Пример 1.5.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение.

Исследуем ряд по признаку Коши в радикальной форме.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

Найдем полученные пределы.

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln n^{\frac{1}{n}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln n^{\frac{1}{n}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n}\right)^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1\cdot\frac{1}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

Таким образом, исходный ряд сходится.

Пример 1.5.5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^7(4n+6)}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{(2x+3)\ln^7(4x+6)}$. Очевидно, что она является непрерывной, убывающей и положительной на промежутке $[1,+\infty)$.

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(2x+3)\ln^7(4x+6)} = \frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{d(\ln(4x+6))}{\ln^7(4x+6)} = -\frac{1}{12}\frac{1}{\ln^6(4x+6)}\bigg|_1^{\infty} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{12}\frac{1}{\ln^6(4x+6)}\right)+\frac{1}{12\ln^6 10} = \frac{1}{12\ln^6 10}.$$

Рассматриваемый интеграл сходится, а значит, сходится и сам ряд.

Пример 1.5.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{10n}$.

Пример 1.5.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(0{,}5+\frac{1}{n}\right)^n$.

Пример 1.5.8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{n}{2n+1}$.

Пример 1.5.9. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^5(2n+1)}$.

1.6 Достаточные признаки сходимости знакопеременных рядов

Определение 1.6.1. Знакопеременными рядами называют ряды, среди членов которых встречаются как положительные, так и отрицательные числа.

Теорема 1.6.1. Пусть дан знакопеременный ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots. \qquad (1.6.1)$$

Если ряд, составленный из абсолютных величин членов этого знакопеременного ряда

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots \qquad (1.6.2)$$

сходится, то сходится и сам знакопеременный ряд.

Доказательство.

Построим два вспомогательных ряда.

$$\frac{|a_1|+a_1}{2} + \frac{|a_2|+a_2}{2} + \ldots + \frac{|a_n|+a_n}{2} + \ldots \qquad (1.6.3)$$

$$\frac{|a_1|-a_1}{2} + \frac{|a_2|-a_2}{2} + \ldots + \frac{|a_n|-a_n}{2} + \ldots \qquad (1.6.4)$$

Все члены ряда (1.6.3) неотрицательны. Действительно, если $a_k < 0$, то $\frac{|a_k|+a_k}{2} = 0$, если $a_k \geq 0$, то $\frac{|a_k|+a_k}{2} = a_k \geq 0$. Можно сказать, что ряд (1.6.3) получен из ряда (1.6.1) заменой отрицательных членов нулями. Ряд (1.6.3) сходится, так как каждый его член не больше соответствующего члена ряда (1.6.2), который по условию сходится. Признак сравнения применим, так как ряды (1.6.2) и (1.6.3) неотрицательны. Тоже самое можно сказать о ряде (1.6.4). Если $a_k \geq 0$, то $\frac{|a_k|-a_k}{2} = 0$, если $a_k < 0$, то $\frac{|a_k|-a_k}{2} = -a_k > 0$. Сходимость этого ряда также устанавливается в результате сравнения с рядом (1.6.2). Из сходимости рядов (1.6.3) и (1.6.4) вытекает сходимость ряда (1.6.1), так как каждый член данного ряда является разностью соответствующих членов рядов (1.6.3) и (1.6.4):

$$a_n = \frac{|a_n|+a_n}{2} - \frac{|a_n|-a_n}{2}.$$

Теорема доказана.

Определение 1.6.2. Ряд называется знакочередующимся, если в нем после каждого положительного члена стоит отрицательный, а после каждого отрицательного – положительный.

Теорема 1.6.2. (Признак Лейбница.) Если члены знакочередующегося ряда не возрастают по абсолютной величине, и предел общего члена ряда равен нулю, то ряд сходится. При этом сумма ряда имеет тот же знак, что и первый член ряда, а по абсолютной величине не превосходит абсолютной величины этого члена.

Доказательство.

Пусть $a_1 > 0$. Запишем ряд в виде:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n-1} a_n + ...,$$

где все числа a_1, a_2, …, a_n, … положительны и удовлетворяют условию

$$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge a_4 \ge ... \ge a_n \ge ...,$$

причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Докажем сначала, что последовательность частичных сумм с четными номерами имеет предел. Это будет следовать из того, что последовательность S_2, S_4, S_6, …, S_{2n}, … не убывает и ограниченна. Действительно,

$S_2 = a_1 - a_2 \ge 0$, так как $a_1 \ge a_2$;

$S_4 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) \ge S_2$, так как $a_3 \ge a_4$;

$S_6 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) \ge S_4$, так как $a_5 \ge a_6$;

и так далее.

Ограниченность последовательности следует из того, что все эти частичные суммы не превосходят a_1:

$S_2 = a_1 - a_2 < a_1$, так как $a_2 > 0$;

$S_4 = a_1 - (a_2 - a_3) - a_4 < a_1$, так как $a_2 \ge a_3$ и $a_4 > 0$;

$S_6 = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - a_6 < a_1$, так как $a_2 \ge a_3$, $a_4 \ge a_5$ и $a_6 > 0$;

и так далее.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$ существует, положителен и не превосходит a_1.

Обозначим этот предел через S:

$$0 < S \le a_1. \qquad (1.6.5)$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$, так как $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$. Итак, $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = S$. Это означает, что ряд сходится. При этом знак S одинаков со знаком первого члена и не превосходит его по модулю (см. неравенство (1.6.5)).

Если $a_1 < 0$ доказательство аналогичное. Теорема доказана.

Определение 1.6.3. Если дан знакопеременный ряд и сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, то знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся. Если знакопеременный ряд сходится, но ряд из абсолютных величин его членов расходится, то такой ряд называется условно сходящимся.

Рассмотрим два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (1) \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} |\, a_n \,| \ (2).$$

Таким образом, для знакопеременного ряда (1) могут представиться следующие три возможности.

1. Ряды (1) и (2) сходятся, в этом случае ряд (1) является абсолютно сходящимся.

2. Ряд (1) сходится, ряд (2) расходится, в этом случае ряд (1) является условно сходящимся.

3. Ряды (1) и (2) расходятся.

Разделение сходящихся рядов на два типа: абсолютно и условно сходящиеся, имеет важное значение. Абсолютно сходящиеся ряды обладают многими свойствами, которых нет у условно сходящихся рядов.

Пример 1.6.1. Исследовать на абсолютную или условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}}.$$

Решение.

А) Рассмотрим ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$. Этот ряд расходится как ряд Дирихле с параметром $\alpha=\frac{1}{5}<1$. В) Исследуем теперь сам ряд по признаку Лейбница. Для этого достаточно проверить, выполняются ли все три условия теоремы. 1) То, что ряд является знакочередующимся, очевидно. 2) Члены ряда убывают по абсолютной величине, то есть $|a_{n+1}|\leq|a_n|$. Действительно, $\frac{1}{\sqrt[5]{n+1}}\leq\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$. 3) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}=0$. Все три условия выполняются, а значит, ряд сходится по признаку Лейбница. Учитывая пункт А), ряд сходится условно.

Пример 1.6.2. Исследовать на абсолютную или условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}.$$

Решение.

А) Рассмотрим ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$. Этот ряд является геометрической прогрессией со знаменателем $q=\frac{1}{5}<1$, следовательно, данный ряд сходится, и, значит, первоначальный ряд сходится абсолютно.

1.7 Оценка остатка знакочередующегося ряда

После того, как установлена сходимость ряда, возникает вопрос о вычислении его суммы. Сумма ряда *S* есть предел его частичных сумм S_n, поэтому всякую частичную сумму S_n можно рассматривать как приближенное значение суммы ряда *S*.

Возникают вопросы: какова погрешность замены $S\approx S_n$ и сколько членов ряда нужно взять, чтобы вычислить сумму с заданной степенью точности.

Определение 1.7.1. Рассмотрим ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots.$$

Остатком R_n сходящегося ряда называется разность между суммой ряда S и n-й частичной суммой: $R_n = S - S_n$, то есть остатком называют сумму ряда $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$

Теорема 1.7.1. Если ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, то $|R_n| \le |a_{n+1}|$.

Доказательство.

Пусть дан ряд $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$, $R_n = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots$.

Для определенности считаем $a_{n+1} > 0$, в противном случае рассуждения были бы аналогичными. Так как остаток является суммой знакочередующегося ряда с монотонно убывающими членами, то по теореме Лейбница $|R_n| \le a_{n+1}$. Теорема доказана.

Говорят, что сумма числового ряды вычислена приближенно с точностью α, если $|S - S^*| < \alpha$, где S – истинная сумма ряда, S^* – приближенная. Как было показано выше, что для того, чтобы вычислить сумму ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, с точностью α, достаточно найти $(k+1)$-ый член ряда, который по модулю не превосходит заданной степени точности, и сложить первые k членов данного ряда.

Обычно берут $\alpha = 10^{-n}$, $n \in N$. Причем окончательный результат округляют до n знаков после запятой, так чтобы все цифры ответа были верными. Но при этом появится погрешность округления меньшая, либо равная $\dfrac{\alpha}{2}$. Поэтому при нахождении приближенной суммы ряда следует вместо α брать величину $\dfrac{\alpha}{2}$ с тем, чтобы окончательный округленный результат имел погрешность строго меньшую α.

Пример 1.7.1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ с точностью $\alpha = 0{,}1$.

Решение.

Распишем ряд в развернутом виде:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots$$

Очевидно, что данный ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Причем модуль пятого члена ряда $|a_5| < \frac{\alpha}{2} = 0{,}05$, а значит,

$$S \approx S_4 = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \approx -0{,}8.$$

ГЛАВА 2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

2.1 Понятие функционального ряда. Область сходимости

Ранее были рассмотрены ряды, членами которых были постоянные числа. Перейдем теперь к таким рядам, члены которых являются функциями переменной *x*, определенными на некотором множестве *E*:

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

Такие ряды называются функциональными. Если положить $x = x_0$ (где x_0 точка множества *E*), то получим числовой ряд:

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots$$

Если последний ряд сходится, то точка x_0 называется точкой сходимости функционального ряда. Если при $x = x_0$ функциональный ряд расходится, то точка x_0 называется точкой расходимости функционального ряда.

Для одних значений *x* из множества *E* функциональный ряд может сходиться, для других значений – расходиться.

Совокупность тех значений *x*, для которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости функционального ряда.

По аналогии с числовыми рядами, сумма первых *n* членов функционального ряда называется частичной суммой:

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x).$$

Частичная сумма $S_n(x)$ есть функция переменной *x*.

Из определения области сходимости функционального ряда следует, что для любой точки *x* этой области существует конечный предел частичной суммы $S_n(x)$ при $n \to \infty$. Пусть $S(x) = \lim\limits_{n \to \infty} S_n(x)$. Наоборот, если точка *x* не принадлежит области сходимости, то частичные суммы $S_n(x)$ не имеют в этой точке конечного предела при $n \to \infty$.

Сумма $S(x)$ функционального ряда является некоторой функцией от *x*, определенной в области сходимости ряда. Для всякого функционального ряда разность $S(x) - S_n(x)$, определенная в области сходимости, называется остатком ряда и обозначается $R_n(x)$. Очевидно, что если функциональный ряд в данной точке x сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Остаток $R_n(x)$ является суммой ряда $u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$, полученного из ряда $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ отбрасыванием его первых n членов.

2.2 Определение степенного ряда. Интервал и радиус сходимости степенного ряда

Важным частным случаем функционального ряда является так называемый степенной ряд.

Степенным рядом называется ряд вида:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots; \qquad (2.2.1)$$

числа a_0, a_1, …, a_n, … называются коэффициентами степенного ряда.

Вид области сходимости степенного ряда будет установлен с помощью следующей теоремы Абеля.

Теорема 2.2.1. (Теорема Абеля.) Если степенной ряд сходится при $x = x_0$, то он абсолютно сходится для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$.

Доказательство.

Так как ряд

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n + \dots$$

по условию сходится, то $a_n x_0^n \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, начиная с некоторого номера N все члены этого ряда станут по модулю меньше 1: $|a_n x_0^n| < 1$. При всех $n \ge N$ имеем:

$$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < \left|\frac{x}{x_0}\right|^n .$$

Таким образом, все члены ряда

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + ... + |a_n x^n| + ... , \qquad (2.2.2)$$

начиная с некоторого номера N, меньше соответствующих членов геометрической прогрессии

$$1 + \left|\frac{x}{x_0}\right| + \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots,$$

которая сходится, так как $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ $(|x| < |x_0|)$. По признаку сравнения ряд (2.2.2) сходится, а, следовательно, ряд (2.2.1) абсолютно сходится при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$. Теорема доказана.

Следствие 1. Из теоремы Абеля следует, что если степенной ряд расходится в некоторой точке x_1, то он расходится во всех точках x, для которых $|x| > |x_1|$.

Следствие 2. На числовой положительной полуоси любая точка сходимости степенного ряда лежит левее любой точки расходимости.

Таким образом, с помощью теоремы Абеля можно выяснить, какой вид имеет область сходимости любого степенного ряда. Вообще говоря, возможны три варианта:

1. Ряд (2.2.1) сходится лишь в одной точке $x = 0$.
2. Областью сходимости степенного ряда (2.2.1) является интервал $(-R, R)$, к которому, в зависимости от конкретного случая, могут быть добавлены одна или обе концевые точки. Здесь R – некоторое положительно число, которое называют радиусом сходимости степенного ряда. Интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда.
3. Степенной ряд сходится на всей числовой прямой.

Следует заметить, что во всех внутренних точках своей области сходимости степенной ряд сходится абсолютно.

2.3 Вычисление радиуса сходимости степенного ряда

Итак, область сходимости и область абсолютной сходимости степенного ряда совпадают (за исключением, быть может, концевых точек интервала сходимости). Поэтому для практического отыскания интервала сходимости степенного ряда

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

строят ряд из абсолютных величин членов данного ряда

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots$$

и находят его область сходимости. Разыскание же области сходимости полученного положительного ряда часто проводится с помощью признаков Даламбера или Коши. Покажем на примерах, как это делается.

Пример 2.3.1. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \qquad (2.3.1)$$

Решение.

Рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин членов данного ряда,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n}. \qquad (2.3.2)$$

Здесь

$$u_n(x) = \frac{|x|^n}{n}, \; u_{n+1}(x) = \frac{|x|^{n+1}}{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1} n}{(n+1)|x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x|.$$

По признаку Даламбера ряд (2.3.2) сходится, если $|x| < 1$, и расходится, если $|x| > 1$. Таким образом, ряд (2.3.1) абсолютно сходится в интервале

$-1 < x < 1$ и расходится для $x < -1$ и $x > 1$. Радиус сходимости $R = 1$. Исследуем сходимость первоначального ряда на концах интервала, то есть в точках $x = 1$ и $x = -1$. При $x = 1$ получаем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Следовательно, при $x = 1$ данный ряд расходится. При $x = -1$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, который сходится на основании признака Лейбница. Итак, первоначальный ряд (2.3.1) сходится при $x \in [-1,1)$.

Пример 2.3.2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Решение.

Применим признак Даламбера к ряду, составленному из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}\ n!}{|x|^n\ (n+1)!} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Итак, для любого x имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = 0 < 1$. Следовательно, первоначальный ряд сходится на всей числовой прямой ($R = \infty$).

Легко показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ сходится лишь в одной точке $x = 0$.

2.4 Интегрирование и дифференцирование степенных рядов

Теорема 2.4.1. Пусть степенной ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (2.4.1)$$

имеет интервал сходимости $(-R, R)$. Тогда ряды, полученные почленным дифференцированием и интегрированием данного ряда, имеют тот же интервал сходимости, что и данный степенной ряд.

Теорема 2.4.2. Степенной ряд (2.4.1) можно почленно дифференцировать в интервале сходимости, то есть

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots = S'(x),$$

где $S(x)$ – сумма данного ряда.

Теорема 2.4.3. Степенной ряд (2.4.1) можно почленно интегрировать в интервале сходимости, то есть

$$a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots = \int_0^x S(x)dx,$$

где $S(x)$ – сумма данного ряда.

Пример 2.4.1. Найти сумму ряда

$$3 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

Решение.

Продифференцируем данный ряд:

$$1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

Этот ряд сходится в интервале $-1 < x < 1$ как геометрическая прогрессия и имеет сумму $S(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Тогда проинтегрированный ряд

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

сходится в том же интервале к сумме

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x),$$

а сумма первоначального ряда равна $3 + \ln(1+x)$.

2.5 Ряды по степеням разности $x - a$

До сего времени мы рассматривали степенные ряды вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Однако часто приходится иметь дело с рядами вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots,$$

расположенными по степеням $x-a$. Эти ряды тоже называются степенными и приводятся к рядам прежнего вида с помощью подстановки $x-a=t$. Поэтому все утверждения и теоремы, сформулированные ранее, переносятся на ряды по степеням $x-a$. Например:

1. Интервалом сходимости ряда по степеням $x-a$ является интервал с центром в точке a: $(a-R, a+R)$.
2. Степенной ряд по степеням $x-a$ абсолютно сходится на интервале $(a-R, a+R)$.
3. Степенной ряд по степеням $x-a$ можно почленно интегрировать и дифференцировать внутри интервала сходимости, причем получающиеся степенные ряды имеют тот же интервал сходимости, что и первоначальный ряд.

Пример 2.5.1. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}(x-2)^n}{n^n}.$$

Решение.

Примени признак Коши к ряду, составленному из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n-1}\,|x+1|^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+1|}{n} \cdot 2^{\frac{n-1}{n}} = |x+1| \lim_{n\to\infty} \frac{2^{1-\frac{1}{n}}}{n} = |x+1| \cdot 0 = 0 < 1$$

при всех $x \in (-\infty, +\infty)$. Следовательно, ряд сходится абсолютно в каждой точке числовой прямой.

Пример 2.5.2. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2}.$$

Решение.

Применим признак Даламбера к ряду, составленному из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|^{n+1}\,n^2}{|x+1|^n\,(n+1)^2}=|x+1|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=|x+1|.$$

Следовательно, ряд сходится, если $|x+1|<1$ и расходится, если $|x+1|>1$. Неравенство $|x+1|<1$ равносильно неравенствам $-1<x+1<1$. Таким образом, ряд сходится в интервале $-2<x<0$ с центром в точке $x=-1$ и с радиусом $R=1$. Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

При $x=0$ получаем сходящийся обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. При $x=-2$ получаем абсолютно сходящийся знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$. Итак, областью сходимости рассматриваемого ряда является сегмент $[-2,0]$.

2.6 Разложение функций в степенной ряд

Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки a тождественно равна сумме некоторого ряда по степеням $x-a$:

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\dots$$

Тогда мы говорим, что функция $f(x)$ разложима в ряд по степеням $x-a$ в этой окрестности.

Известно, что если функция разлагается в степенной ряд по степеням $x-a$, то этот ряд имеет следующий вид:

$$f(x)=f(a)+\frac{f^{/}(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{//}(x)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots$$

Этот ряд называется рядом Тейлора, соответствующим функции $f(x)$, а его коэффициенты – коэффициентами Тейлора.

Если $a=0$, то мы получим частный случай ряда Тейлора, который называют рядом Маклорена.

Известно, что многие функции можно разложить в ряд Тейлора в окрестности любой точки a из их области определения.

Будем считать известными следующие пять разложений основных элементарных функций в ряды Маклорена:

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ для всех значений x;

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$ для всех значений x;

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ для всех значений x;

4. $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \ldots$ для всех x из промежутка $(-1,1]$;

5. $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n + \ldots$

   для всех значений m и для всех x из промежутка $(-1,1)$. (Биномиальное разложение.)

С помощью этих формул можно раскладывать в ряды Маклорена многие «похожие» функции методом подстановки.

Пример 2.6.1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \sin 4x$.

Решение.

Воспользуемся готовым разложением функции $\sin x$ в ряд Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

и формально заменим все x на $4x$, в результате чего получим разложение рассматриваемой функции в ряд Маклорена:

$$\sin 4x = (4x) - \frac{(4x)^3}{3!} + \frac{(4x)^5}{5!} - \frac{(4x)^7}{7!} + \ldots$$

Кроме того, можно разлагать функции в степенные ряды с помощью интегрирования степенных рядов. Рассмотрим пример.

Пример 2.6.2. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\operatorname{arctg} x$ в интервале $(-1;1)$.

Решение.

Для этого заметим, прежде всего, что

$$\operatorname{arctg} x=\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}.$$

Функцию $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$ можно разложить по степеням x в интервале $(-1;1)$, используя биномиальное разложение:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots$$

(Данное разложение можно также получить из тех соображений, что $\frac{1}{1+x^2}$ есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=-x^2$.) Поэтому по теореме 2.4.3

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

в интервале $(-1;1)$. (Можно показать, что это равенство остается справедливым также при $x=1$ и $x=-1$.)

2.7 Применение рядов к приближенным вычислениям

Степенные ряды являются мощным вычислительным средством. С их помощью можно, например, вычислять приближенные значения функций, а также приближенно вычислять некоторые интегралы, не выражающиеся в элементарных функциях.

Пример 2.7.1. Вычислить $\ln\frac{3}{2}$ с точность $\alpha=0{,}01$.

Решение.

Воспользуемся разложением

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots$$

Подставим $x = \frac{1}{2}$:

$$\ln\frac{3}{2} = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} - \frac{1}{384} + \ldots$$

Таким образом, задача свелась к приближенному вычислению суммы числового ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, с заданной степенью точности. Такая задача рассматривалась в примере 1.7.1. Так как $|a_6| = \frac{1}{384} < \frac{\alpha}{2} = 0{,}005$, то

$$\ln\frac{3}{2} \approx S_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} \approx 0{,}41.$$

(Результат округляем до второго знака после запятой, так как $\alpha = 0{,}01$.)

Пример 2.7.2. Вычислить $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью $\alpha = 0{,}0001$.

Решение.

Вычислить этот интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница мы не можем, так как первообразная от $\frac{\sin x}{x}$ не является элементарной функцией. Поэтому разложим подынтегральную функцию в степенной ряд

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots$$

и проинтегрируем этот ряд почленно в границах от 0 до $\frac{1}{4}$. (Можно показать, что этот промежуток входит в область сходимости ряда.)

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots\right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}} =$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{3\cdot 3!\cdot 4^3}+\frac{1}{5\cdot 5!\cdot 4^5}-\ldots\approx 0{,}25000-0{,}00086\approx 0{,}2491.$$

(Мы отбросили все члены, начиная с третьего, так как уже он меньше $\frac{\alpha}{2}=0{,}00005$.)

2.8 Ряды Фурье

Многие явления природы протекают периодически, то есть повторяются в определенном порядке по истечении некоторого промежутка времени, называемого периодом. Математически такие явления описываются с помощью периодических функций. В общем случае характер периодического движения может быть очень сложным. Поэтому естественно поставить вопрос: нельзя ли произвольную периодическую функцию представить как сумму более простых периодических функций. Таким представлением периодической функции пользуются, в частности, в электротехнике: явления, происходящие в электрических цепях с несинусоидальной периодически меняющейся электродвижущей силой, проще всего поддаются исследованию, если эту электродвижущую силу разложить на сумму гармоник.

Известно, что всякую периодическую функцию с периодом $2l$ из достаточно широкого класса можно представить в виде суммы бесконечного числа гармоник, точнее всякую периодическую функцию $f(x)$ из этого класса можно представить как сумму ряда, членами которого являются гармоники:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

где

$$a_0=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx \quad k = 1,2,... \ ,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx \quad k = 1,2,... \ ,$$

$[a,b]$ – произвольный отрезок длины $2l$.

Данный ряд называется рядом Фурье, а коэффициенты a_0, a_k, b_k – коэффициентами Фурье. Отметим лишь, что в точках непрерывности функции $f(x)$ сумма ряда Фурье равна значению функции $f(x)$, но если x_0 – точка разрыва первого рода, то сумма ряда Фурье равна среднему арифметическому предельных значений функции в этой точке справа и слева.

Пример 2.8.1. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на промежутке $-\pi < x \le \pi$ формулой $y = x$.

Решение.

Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = 0,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kxdx = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kxdx = \frac{-2(-1)^k}{k}$$ (данный интеграл можно вычислить методом интегрирования по частям).

Получаем следующий ряд Фурье:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2(-1)^k}{k}\sin kx,$$

который будет сходиться к рассматриваемой функции во всех точках за исключением $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$, в этих точках ряд будет сходиться к нулю.

ГЛАВА 3. ЗАДАЧИ

3.1 Нахождение сумм числовых рядов

В задачах 1.1-1.8 требуется найти сумму ряда.

Задачи для разбора у доски

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Ответ: $\frac{1}{2}$.

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$. Ответ: $\frac{11}{18}$.

Задачи для самостоятельного решения

1.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Ответ: $\frac{1}{4}$.

1.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$. Ответ: 1.

1.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-56n-33}$. Ответ: $\frac{1}{12}$.

1.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{36n^2-12n-35}$. Ответ: $-\frac{4}{5}$.

1.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4-n}{n(n+1)(n+2)}$. Ответ: $\frac{1}{2}$.

1.8. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4}{n(n-1)(n-2)}$. Ответ: 1.

Дополнительная задача

1.9. Докажите, что частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$ определяется формулой $S_n=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$ и найдите суму ряда.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

3.2 Необходимый признак. Признаки сравнения

В задачах 2.1-2.12 требуется исследовать ряды на сходимость.

Задачи для разбора у доски.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$. Ответ: Ряд расходится.

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos\frac{1}{\sqrt{n}}$. Ответ: Ряд расходится.

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+4n^2}{2+3n+12n^2}$. Ответ: Ряд расходится.

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$. Ответ: Ряд сходится.

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$. Ответ: Ряд сходится.

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}\frac{\pi}{4n}$. Ответ: Ряд расходится.

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^2+n+10}$. Ответ: Ряд расходится.

Задачи для самостоятельного решения

2.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1+n}{3+\sqrt{n}+2n}$. Ответ: Ряд расходится.

2.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt{2n+1}}{\sqrt[3]{n+2}+4\sqrt{n}}$. Ответ: Ряд расходится.

2.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$. Ответ: Ряд расходится.

2.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5}$. Ответ: Ряд сходится.

2.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$. Ответ: Ряд расходится.

3.3 Признаки сравнения

В задачах 3.1-3.10 требуется исследовать ряды на сходимость.

Задачи для разбора у доски

3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$. Ответ: Ряд расходится.

3.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sqrt{n}+4n+5\sqrt[4]{5n+4}+1}{\sqrt[4]{16n^{11}+4}+7n^2+2}$. Ответ: Ряд сходится.

3.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\dfrac{\sqrt[3]{n}+1}{n+10}$. Ответ: Ряд расходится.

3.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{1}{n^2}}{3^n+4}$. Ответ: Ряд сходится.

Задачи для самостоятельного решения

3.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$. Ответ: Ряд сходится.

3.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{arcctg}\left(3+(-1)^n\right)}{\ln(7+n)}$. Ответ: Ряд расходится.

3.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+\operatorname{arctg}(-1)^n}{\sqrt{4+n^4}}$. Ответ: Ряд сходится.

3.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\operatorname{tg}\dfrac{n}{\sqrt[3]{n^{10}}}$. Ответ: Ряд расходится.

3.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{n+1}{(n^2+4)\sqrt[7]{n^2+1}}$. Ответ: Ряд сходится.

Дополнительная задача

3.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$. Ответ: Ряд сходится.

3.4 Признаки Даламбера и Коши

В задачах 4.1-4.12 требуется исследовать ряды на сходимость.

Задачи для разбора у доски

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$. Ответ: Ряд сходится.

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$. Ответ: Ряд сходится.

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$. Ответ: Ряд сходится.

4.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$. Ответ: Ряд сходится.

Задачи для самостоятельного решения.

4.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$. Ответ: Ряд сходится.

4.6. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$. Ответ: Ряд сходится.

4.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n!}$. Ответ: Ряд сходится.

4.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+2)^{10}\cdot 7^n}$. Ответ: Ряд сходится.

4.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot 3^n}{(2n+1)!!}$. Ответ: Ряд расходится.

4.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4n+1)}{n\cdot 3^n}$. Ответ: Ряд расходится.

4.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+7}\right)^{n^2}\cdot 10^n$. Ответ: Ряд сходится.

4.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{17}\cdot 13^{n+5}}{11^{n}}$. Ответ: Ряд расходится.

3.5 Интегральный признак Коши. Разные задачи

В задачах 5.1-5.3, 5.5-5.6, 5.8 требуется исследовать ряды на сходимость.

Задачи для разбора у доски

5.1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. Ответ: Ряд расходится.

5.2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{2} n}$. Ответ: Ряд сходится.

5.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+10)\sqrt[3]{\ln(20n-11)}}$. Ответ: Ряд расходится.

5.4. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0$, $a>1$.

Задачи для самостоятельного решения

5.5. $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{2n+11}{(n^{2}-5)\ln(n-2)}$. Ответ: Ряд расходится.

5.6. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n+7}{\left(\frac{7}{2}n^{2}+20\right)\ln^{3}\left(\frac{n}{2}\right)}$. Ответ: Ряд сходится.

5.7. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{n}}{(n!)^{2}}=0$.

Дополнительная задача

5.8. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$. Ответ: Ряд сходится.

3.6 Разные задачи

В задачах 6.1-6.12 требуется исследовать ряды на сходимость.

Задачи для самостоятельного решения

6.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$. Ответ: Ряд расходится.

6.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$. Ответ: Ряд сходится.

6.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1000n+1}$. Ответ: Ряд расходится.

6.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$. Ответ: Ряд сходится.

6.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^4}$. Ответ: Ряд расходится.

6.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$. Ответ: Ряд расходится.

6.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2n}$. Ответ: Ряд расходится.

6.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$. Ответ: Ряд сходится.

6.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}$. Ответ: Ряд сходится.

6.10. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$. Ответ: Ряд расходится.

6.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$. Ответ: Ряд расходится.

6.12. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$. Ответ: Ряд сходится.

3.7 Разные задачи

В задачах 7.1-7.16 требуется исследовать ряды на сходимость.

Задачи для самостоятельного решения

7.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$. Ответ: Ряд сходится.

7.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos^2\frac{\pi n}{3}}{2^n}$. Ответ: Ряд сходится.

7.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$. Ответ: Ряд сходится.

7.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)$. Ответ: Ряд сходится.

7.5. $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$. Ответ: Ряд расходится.

7.6. $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. Ответ: Ряд расходится.

7.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{arctg}^n\sqrt{\frac{3n+2}{n+1}}$. Ответ: Ряд расходится.

7.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+4}\right)^{n^3+1}$. Ответ: Ряд сходится.

7.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{\pi n}{n^2\sqrt{n}+n+1}$. Ответ: Ряд сходится.

7.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$. Ответ: Ряд сходится.

7.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{0{,}3}}$. Ответ: Ряд расходится.

7.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. Ответ: Ряд расходится.

Дополнительные задачи

7.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$. Ответ: Ряд сходится.

7.14. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$. Ответ: Ряд сходится.

7.15. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$ Ответ: Ряд сходится.

7.16. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$. Ответ: Ряд расходится.

3.8 Знакопеременные ряды

В задачах 8.1-8.2, 8.4-8.11, 8.14-8.15 требуется исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость.

Задачи для разбора у доски

8.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}$. Ответ: Сходится абсолютно.

8.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+20}$. Ответ: Сходится условно.

8.3. Вычислите сумму ряда с точностью α: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(2n)!!}$, $\alpha=0{,}001$.

Ответ: $-0{,}303$.

Задачи для самостоятельного решения

8.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$. Ответ: Сходится условно.

8.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$. Ответ: Сходится условно.

8.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Ответ: Сходится условно.

8.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$. Ответ: Сходится условно.

8.8. $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2-4n+1}}$. Ответ: Сходится условно.

8.9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n$. Ответ: Сходится абсолютно.

8.10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}$. Ответ: Сходится абсолютно.

8.11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{5n+2}$. Ответ: Расходится.

8.12. Вычислите сумму ряда с точностью α: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2\cdot 3^n}$. $\alpha=0{,}0001$.

Ответ: –0,9271.

8.13. Вычислите сумму ряда с точностью α: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{n^5}$. $\alpha=0{,}01$.

Ответ: –0,97.

Дополнительные задачи

8.14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{arctg}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$. Ответ: Сходится абсолютно.

8.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$. Ответ: Расходится.

3.9 Область сходимости степенных рядов

В задачах 9.1-9.17 требуется найти область сходимости степенных рядов.

Задачи для разбора у доски

9.1. $\sum_{n=1}^{\infty}10^n x^n$. Ответ: $\left(-\frac{1}{10};\frac{1}{10}\right)$.

9.2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$. Ответ: $(-1;1]$.

9.3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(x-2)^n}{\sqrt[3]{n}}$. Ответ: $(1;3]$.

9.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n(x+3)^{2n}}$. Ответ: $(-\infty;-3,5)\cup(-2,5;+\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

9.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n10^{n-1}}$. Ответ: $[-10;10)$.

9.6. $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$. Ответ: $\{0\}$.

9.7. $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^{2(n-1)}$. Ответ: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

9.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$. Ответ: R.

9.9. $\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)3^{n-1}x^{n-1}$. Ответ: $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

9.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$. Ответ: $[-1;1]$.

9.11. $\sum_{n=1}^{\infty}(nx)^n$. Ответ: $\{0\}$.

9.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}$. Ответ: $[-1;1)$.

9.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x\right]^n$. Ответ: $\left(-\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right)$.

9.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+20)^n}{n\sqrt{n}}$. Ответ: $[-21;-19]$.

9.15. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-5)^{4n}}{81^n}$. Ответ: $(2;8)$.

9.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^2\cdot 2^n}(x+1)^n$. Ответ: $[-3;1)$.

9.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n^4}\right)\cdot\frac{1}{(x-5)^n}$. Ответ: $(-\infty;4]\bigcup[6;+\infty)$.

3.10 Интегрирование и дифференцирование рядов

В задачах 10.1-10.2, 10.4-10.10 требуется найти сумму ряда и его интервал сходимости.

Задачи для разбора у доски

10.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n-1}$. Ответ: $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$, $x\in<-1;1>$.

10.2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$. Ответ: $(x+1)\ln(x+1)-x$, $x\in<-1;1>$.

10.3. Вычислите $\int_{0}^{0,125}f(x)dx$, где $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n3^{n-1}x^{n-1}$.

Ответ: 0,2.

10.4. $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$. Ответ: $\frac{1}{(1-x)^2}$, $x\in<-1;1>$.

10.5. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$. Ответ: $\frac{x-x^2}{(1+x)^3}$, $x\in<-1;1>$.

Задачи для самостоятельного решения

10.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$. Ответ: $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $x\in<-1;1>$.

10.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$. Ответ: $\frac{1}{(1-x)^3}$, $x\in<-1;1>$.

10.8. $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$. Ответ: $\frac{x}{(1-x)^2}$, $x\in<-1;1>$.

10.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$. Ответ: $\operatorname{arctg}x$, $x\in<-1;1>$.

10.10. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$. Ответ: $\frac{2x}{(1-x)^3}$, $x \in <-1;1>$.

3.11 Разложение функций в степенные ряды. Приближенные вычисления

Задачи для разбора у доски

В задачах 11.11-11.3 требуется разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$, в ответе записать первые четыре слагаемых; в задачах 11.4-11.5 требуется вычислить приближенно с точностью $\alpha = 0{,}001$.

11.1. $y = \mathrm{e}^{-3x}$. Ответ: $1 - 3x + \frac{9x^2}{2} - \frac{9x^3}{2} + \ldots$

11.2. $y = \frac{\cos(x^3) - 1}{x^2}$. Ответ: $-\frac{x^4}{2} + \frac{x^{10}}{24} - \frac{x^{16}}{720} + \frac{x^{22}}{40320} - \ldots$

11.3. $y = \frac{x}{\sqrt[4]{16 + x^3}}$. Ответ: $\frac{x}{2} - \frac{x^4}{2^7} + \frac{5x^7}{2^{14}} - \frac{15x^{10}}{2^{20}} + \ldots$

11.4. $\int_0^{0,25} \sin(16x^2)dx$. Ответ: 0,078.

11.5. $\int_0^1 \ln(1 + x^5)dx$. Ответ: 0,135.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 11.6-11.7 требуется разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$; в задачах 11.8-11.10 требуется вычислить приближенно с точностью $\alpha = 0{,}001$.

11.6. $y = \sin(2x^2)$. Ответ: $2x^2 - \frac{4x^6}{3} + \frac{4x^{10}}{15} - \frac{8x^{14}}{315} + \ldots$

11.7. $y = \ln(1 - 4x)$. Ответ: $-4x - 8x^2 - \frac{64x^3}{3} - 64x^4 - \ldots$

11.8. $\int\limits_{0}^{0,2} \cos\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$. Ответ: 0,200.

11.9. $\int\limits_{0}^{0,5} \mathrm{e}^{\frac{-2x^2}{3}}\, dx$. Ответ: 0,474.

11.10. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{32-x^5}-1}$. Ответ: 1,002.

Дополнительные задачи

В задачах 11.11-11.29 требуется разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0, ответ записать в общем виде; в задачах 11.30-11.38 требуется вычислить приближенно с заданной точностью.

11.11. $y = \ln x$, $x_0 = 1$. Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$.

11.12. $y = \sqrt{x^3}$, $x_0 = 1$.

Ответ: $1 + \frac{3}{2}\left((x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + \sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-5)}{2^{n-1} \cdot n!}(x-1)^n \right)$

11.13. $y = \frac{1}{x}$, $x_3 = 3$. Ответ: $\frac{1}{3} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{3^n}$.

11.14. $y = \sin\frac{\pi x}{4}$, $x_0 = 2$. Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{4^{2n} \cdot (2n)!}(x-2)^{2n}$.

11.15. $y = e^{2x}$, $x_0 = 0$. Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$.

11.16. $y = e^{-x^2}$, $x_0 = 0$. Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$.

11.17. $y = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$. Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$.

11.18. $y = \begin{cases} \frac{e^{x^3} - e^{-x^3}}{2x^3}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$. Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{6n-6}}{(2n-1)!}$.

11.19. $y=\sin\dfrac{x}{2}$, $x_0=0$. Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{2^{2n-1}\cdot(2n-1)!}$.

11.20. $y=\cos^2 x$, $x_0=0$. Ответ: $1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$.

11.21. $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$, $x_0=0$. Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}$.

11.22. $y=(x-\operatorname{tg}x)\cos x$, $x_0=0$. Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{2n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

11.23. $y=\ln(10+x)$, $x_0=0$. Ответ: $\ln 10+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{n}}{n\cdot 10^{n}}$.

11.24. $y=x\ln(1+x)$, $x_0=0$. Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{n}$.

11.25. $y=\sqrt{1+x^2}$, $x_0=0$. Ответ: $1+\dfrac{x^2}{2}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^{n}\cdot n!}x^{2n}$.

11.26. $y=\sqrt[3]{8-x^3}$, $x_0=0$. Ответ: $2+2\cdot\left(-\dfrac{x^3}{24}-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1\cdot 2\cdot\ldots(3n-4)}{3^{n}\cdot 8^{n}\cdot n!}x^{3n}\right)$.

11.27. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$, $x_0=0$. Ответ: $1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3^{n}\cdot n!}x^{3n}$.

11.28. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$, $x_0=0$. Ответ: $x^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^{n}\cdot n!}x^{2n+2}$.

11.29. $y=\dfrac{x\sin 2x}{2}$, $x_0=0$. Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{2n-2}}{(2n-1)!}x^{2n}$.

11.30. $\sqrt{\mathrm{e}}$, $\varepsilon=0{,}001$. Ответ: 1,649.

11.31. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}$, $\varepsilon=0{,}0001$. Ответ: 0,7788.

11.32. $\cos 1^0$, $\varepsilon=0{,}001$. Ответ: 1,000.

11.33. $\cos 10^0$, $\varepsilon=0{,}0001$. Ответ: 0,9848.

11.34. $\int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3}dx$, $\varepsilon = 0{,}001$. Ответ: 32,831.

11.35. $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$, $\varepsilon = 0{,}001$. Ответ: 0,487.

11.36. $\int\limits_{0}^{0,8} x^{10}\sin x dx$, $\varepsilon = 0{,}001$. Ответ: 0,006.

11.37. $\ln 4$, $\varepsilon = 0{,}01$. Ответ: 1,39.

11.38. $\arcsin\frac{1}{4}$, $\varepsilon = 0{,}001$. Ответ: 0,253.

3.12 Ряды Фурье

Задачи для разбора у доски

12.1. Разложите функцию $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ в ряд Фурье в интервале $(0;2\pi)$.

Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

12.2. Разложите функцию $f(x) = x$ в ряд Фурье в интервале $(0;\pi)$ только по косинусам.

Ответ: $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos[(2n+1)x]}{(2n+1)^2}$.

Задачи для самостоятельного решения

12.3. Разложите функцию $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi|x|}{2}$ в ряд Фурье в промежутке $[0;\pi]$.

Ответ: $-\frac{\pi^2}{6} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.

12.4. Разложите функцию $f(x) = x^2$ в ряд Фурье в интервале $(0;\pi)$ только по синусам.

Ответ: $\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left\{\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3}[(-1)^n - 1]\right\}\sin nx$.

ГЛАВА 4. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

1. Исследуйте ряд на сходимость.

1.1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

1.2) $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{2+(-1)^n}{n^3}$.

1.3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(n\pi/2)}{n(n+1)(n+2)}$.

1.4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$.

1.5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n-\ln n}$.

1.6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1+(-1)^n}{2}n}{n^3+2}$.

1.7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2+\cos n\pi)}{2n^2-1}$.

1.8) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{n-1}{n}}{\sqrt[3]{n^3-3n}}$.

1.9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2+1}$.

1.10) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}$.

1.11) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\arccos\frac{(-1)^n n}{n+1}}{n^2+2}$.

1.12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2 n}{n^3+5}$.

1.13.) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\ln n}{n^2-3}$.

1.14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{n^3\left(2+\sin(n\pi/2)\right)}$.

1.15) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\sin\frac{2+(-1)^n}{6}\pi$.

1.16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3+n+1}$.

1.17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sin\frac{\pi n}{2}}{n^2}$.

1.18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\frac{\pi n}{3}}{3^n+2}$.

1.19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+\cos\frac{n\pi}{2})\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7+5}}$.

1.20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sin\frac{n\pi}{4}}{n^2}\operatorname{ctg}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

1.21) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 2^n}{n^2}$.

1.22) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n^5+n}}$.

1.23) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n+\sqrt[3]{\ln^2 n}}$.

1.24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{3}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2-n}}$.

1.25) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2n+1}}{n\left(3+\sin\frac{\pi n}{4}\right)}$.

1.26) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\cos\frac{2\pi}{3n}}{\sqrt[4]{n^4-1}}$.

1.27) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+2}}$.

1.28) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\left[2+(-1)^n\right]}{\ln(1+n)}$.

1.29) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arcctg}(-1)^n}{\sqrt{n\left(2+n^2\right)}}$.

1.30) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{3+(-1)^n}{4}}{2^n+n}$.

1.31) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2\sin^2 n}$.

2. Исследуйте ряд на сходимость.

2.1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^{n-1}+n-1}$.

2.2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

2.3) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+5}{n^2+4}$.

2.4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}$.

2.5) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}$.

2.6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n^2+3\right)^2}{n^5+\ln^4 n}$.

2.7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{n^5+\sin 2^n}$.

2.8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+\cos n}{3^n+\sin n}$.

2.9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\cos^2 6n}$.

2.10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n+1}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

2.11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$.

2.12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$.

2.13) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}\sin\frac{1}{n-1}$.

2.14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}\operatorname{arctg}\frac{n+3}{n^2+5}$.

2.15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}}\left(e^{1/\sqrt{n}}-1\right).$

2.16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+1}{n^2+n+2}.$

2.17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{n^3}.$

2.18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^3}{n^3+1}.$

2.19) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}n^3\,\mathrm{tg}^5\,\frac{\pi}{n}.$

2.20) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{\left(\sqrt[3]{n}-1\right)\left(n\sqrt[4]{n^3}-1\right)}.$

2.21) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right).$

2.22) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}.$

2.23) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(e^{\sqrt{n}/\left(n^3-1\right)}-1\right).$

2.24) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2n+1}{n^2\left(n+1\right)^2}.$

2.25) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2\pi}{2n+1}}{\sqrt{n}}.$

2.26) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+7n}{5^n+n}.$

2.27) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(e^{1/n}-1\right)^2.$

2.28) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}.$

2.29) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{arctg}\,\frac{1}{(n-1)\sqrt[5]{n^2+1}}.$

2.30) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n}{n^2\sqrt[3]{n}+5}.$

2.31) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{n}{\left(n^2+3\right)^{5/2}}.$

3. Исследуйте ряд на сходимость.

3.1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n\left(n-1\right)!}.$

3.2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n!\right)^2}{2^{n2}}.$

3.3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}\left(n^3+1\right)}{\left(n+1\right)!}.$

3.4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n 2n!}{\left(2n\right)!}.$

3.5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2n+2\right)!}{3n+5}\cdot\frac{1}{2^n}.$

3.6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n!}\sin\frac{2}{3^n}.$

3.7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}\,\frac{5}{n}}{n!}.$

3.8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}.$

3.9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n)!}\operatorname{tg}\frac{1}{5^n}$.

3.10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n\left(n^2-1\right)}{n!}$.

3.11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}$.

3.12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$.

3.13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$.

3.14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n!)}$.

3.15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{3^n(n+1)!}$.

3.16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n-1}}$.

3.17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{\left(3^n+1\right)(2n)!}$.

3.18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\sin\frac{\pi}{2^n}$.

3.19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$.

3.20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$.

3.21) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

3.22) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$.

3.23) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)!4^n}$.

3.24) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}$.

3.25) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\ldots(2n+5)}$.

3.26) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n!}{\sqrt{2^n+3}}$.

3.27) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)!}{10^n n^2}$.

3.28) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$.

3.29) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$.

3.30) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$.

3.31) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{2^{n+1}n!}$.

4. Исследуйте ряд на сходимость.

4.1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$.

4.2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

4.3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$.

4.4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^4\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^{n}$.

4.5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$.

4.6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^{n}(n+1)^3$.

4.7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}$.

4.8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$.

4.9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\arcsin^n\frac{\pi}{4n}$.

4.10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$.

4.11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\frac{n}{5^n}$.

4.12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$.

4.13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{n}(n-1)^2$.

4.14) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$.

4.15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$.

4.16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n/2}$.

4.17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$.

4.18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\sin^n\frac{\pi}{2n}$.

4.19) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln n)^n}$.

4.20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}$.

4.21) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\,\mathrm{arctg}^n\frac{\pi}{3n}$.

4.22) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5 3^n}{(2n+1)^n}$.

4.23) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\mathrm{e}^{-n}$.

4.24) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$.

4.25) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$.

4.26) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{n/2}}$.

4.27) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n}$.

4.28) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}\dfrac{1}{2^n}$.

4.29) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot 3^{n+2}}{5^n}$.

4.30) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sqrt[3]{n}\left(\dfrac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$.

4.31) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^4\operatorname{arctg}^{2n}\dfrac{\pi}{4n}$.

5. Исследуйте ряд на сходимость.

5.1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2(3n+1)}$.

5.2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2(2n+1)}$.

5.3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$.

5.4) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$.

5.5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$.

5.6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)\ln^2\left(n\sqrt{5}+2\right)}$.

5.7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\left(n\sqrt{2}+1\right)\ln^2\left(n\sqrt{3}+1\right)}$.

5.8) $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\dfrac{1}{(n-2)\ln(n-3)}$.

5.9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)\ln(2n)}$.

5.10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln(2n)}$.

5.11) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-1)\ln n}$.

5.12) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}$.

5.13) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-3)\ln(3n+1)}$.

5.14) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n+2)\ln^2 n}$.

5.15) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n+3)\ln^2(2n)}$.

5.16) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}$.

5.17) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(n-1)}$.

5.18) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}$.

5.19) $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\dfrac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}$.

5.20) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}$.

5.21) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}$.

5.22) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n/3)\ln^2(n+7)}$.

5.23) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(n^3+1)\ln n}$.

5.24) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{(n^2-3)\ln^2 n}$.

5.25) $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(n/3-1)\ln^2(n/2)}$.

5.26) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2+5)\ln n}$.

5.27) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n}{(2n^2+3)\ln n}$.

5.28) $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n+1}{(5n^2-9)\ln(n-2)}$.

5.29) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2n+1}{(3n^2/2+2)\ln(n/2)}$.

5.30) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)\ln n}$.

5.31) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)}$.

6. Исследуйте ряд на абсолютную и условную сходимость.

6.1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

6.2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

6.3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.

6.4) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln\ln n)\ln n}$.

6.5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n^2}{n^4-n^2+1}$.

6.6) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}$.

6.7) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$.

6.8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[4]{2n+3}}$.

6.9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}$.

6.10) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\pi}{6n}$.

6.11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n!}$.

6.12) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(2n)}$.

6.13) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{tg}\frac{1}{n}$.

6.14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$.

6.15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}$.

6.16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{\cos\dfrac{\pi}{3\sqrt{n}}\sqrt[3]{3n+\ln n}}$.

6.17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(3/2)^{n}}$.

6.18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{2n-1}{3n}$.

6.19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}(n+3)}{\ln(n+4)}$.

6.20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{n+1}{\sqrt{n^{3}}}$.

6.21) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}}$.

6.22) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{(2n+1)2^{2n+1}}$.

6.23) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{\sin\left(n\sqrt{n}\right)}{n\sqrt{n}}$.

6.24) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n+\cos\left(2/\sqrt{n+4}\right)}$.

6.25) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\dfrac{\pi}{2^{n}}$.

6.26) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n^{2}+\sin^{2}n}$.

6.27) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{\sin 3^{n}}{3^{n}}$.

6.28) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^{2}}\right)$.

6.29) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\dfrac{1}{n}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{1}{n}$.

6.30) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(1-\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

6.31) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{n^{3}}{(n+1)!}$.

7. Вычислите сумму ряда с точностью α.

7.1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{3n^{2}}$, $\alpha=0{,}01$.

7.2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}$, $\alpha=0{,}01$.

7.3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(2n)^{3}}$, $\alpha=0{,}001$.

7.4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{n!(2n+1)}$, $\alpha=0{,}001$.

7.5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{2n+1}{n^{3}(n+1)}$, $\alpha=0{,}01$.

7.6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}$, $\alpha=0{,}0001$.

7.7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{2^n},\ \alpha=0{,}1.$ 7.8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n^2}{3^n},\ \alpha=0{,}1.$

7.9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{(2n-1)^2(2n+1)^2},\ \alpha=0{,}001.$

7.10) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!!},\ \alpha=0{,}0001.$

7.11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!!},\ \alpha=0{,}001.$ 7.12) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n,\ \alpha=0{,}01.$

7.13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{7^n},\ \alpha=0{,}0001.$ 7.14) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n,\ \alpha=0{,}1.$

7.15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!},\ \alpha=0{,}001.$ 7.16) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n!},\ \alpha=0{,}01.$

7.17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!2n},\ \alpha=0{,}00001.$ 7.18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2n+1)}{(2n)!n!},\ \alpha=0{,}001.$

7.19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!},\ \alpha=0{,}001.$ 7.20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n\cdot n!},\ \alpha=0{,}001.$

7.21) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!n!},\ \alpha=0{,}00001.$ 7.22) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{3^n(n+1)},\ \alpha=0{,}001.$

7.23) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)},\ \alpha=0{,}001.$ 7.24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi/2+\pi n)}{n^3},\ \alpha=0{,}01.$

7.25) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{(n+1)^n},\ \alpha=0{,}001.$ 7.26) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^n},\ \alpha=0{,}001.$

7.27) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi/2+\pi n)}{n^3+1},\ \alpha=0{,}01.$ 7.28) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2(n+3)},\ \alpha=0{,}01.$

7.29) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(\pi n)}{(n^3+1)^2},\ \alpha=0{,}001.$ 7.30) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^3},\ \alpha=0{,}01.$

7.31) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{(1+n^3)^2}$, $\alpha = 0{,}001$.

8. Докажите справедливость равенства. (Ответом служит число ρ, получаемое при применении признака Даламбера или признака Коши.)

8.1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

8.2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n)!}=0$.

8.3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n!!}{n^n}=0$.

8.4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)^n}{(2n-1)!}=0$.

8.5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{2n^2!}=0$.

8.6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$.

8.7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{5^{n^2}}=0$.

8.8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n!}=0$.

8.9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}=0$.

8.10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n+1)!}=0$.

8.11) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{n^n}=0$.

8.12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n)^n}{(2n-1)!}=0$.

8.13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n)!}{2^{n2}}=0$.

8.14) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^3}=0$.

8.15) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5}{(2n)!}=0$.

8.16) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{3n}}{n!}=0$.

8.17) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{n^n}=0$.

8.18) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n-1)!}=0$.

8.19) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!}{n^n}=0$.

8.20) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)^n}{(2n+1)!}=0$.

8.21) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(4n)!}{2^{n^2}}=0$.

8.22) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{\left[(n+1)!\right]^2}=0$.

8.23) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{4^{n^2}}=0$.

8.24) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{2^{n^2}}=0$.

8.25) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!}{n^n}=0$.

8.26) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(2n+3)!}=0$.

8.27) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)!!}{n^n}=0$.

8.28) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5n)^n}{(2n+1)!}=0$.

8.29) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5n)!}{2^{n^2}}=0$.

8.30) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{\left[(n+2)!\right]^2}=0$.

8.31) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{(2n)!!}=0$.

9. Найдите область сходимости ряда.

9.1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-2)^3(x+3)^{2n}}{2n+3}$.

9.2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)5^n}$.

9.3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$.

9.4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+3}{(n+1)^5x^{2n}}$.

9.5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-2)^{2n}}{2n}$.

9.6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$.

9.7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3+1}{3^n(x-2)^n}$.

9.8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{x^n}$.

9.9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+5)^{2n-1}}{4^n(2n-1)}$.

9.10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}$.

9.11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}$.

9.12) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{3n(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}$.

9.13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+5)^n\operatorname{tg}\dfrac{1}{3^n}$.

9.14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n$.

9.15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 9^n(x-1)^{2n}}$.

9.16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{n^2}x^{n^2}$.

9.17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$.

9.18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}$.

9.19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$. 9.20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}$.

9.21) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)(x-3)^{2n}}$. 9.22) $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{2^n n^2 (x+2)^n}$.

9.23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{n^2}}{n^{n+1}}$. 9.24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{x^n}$.

9.25) $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{3^n (x+3)^n}$. 9.26) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n (x+1)^{2n}}{n}$.

9.27) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{(2n+9)^5 (x+2)^{2n}}$. 9.28) $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n (x+4)^n}$.

9.29) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}$. 9.30) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 (x-3)^n}{(n^4+1)^2}$.

9.31) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$.

10. Вычислите интеграл с точностью $\alpha = 0{,}001$.

10.1) $\int_0^{0,1} \mathrm{e}^{-6x^2}\,dx$. 10.2) $\int_0^{0,1} \sin(100x^2)\,dx$.

10.3) $\int_0^{1} \cos x^2 dx$. 10.4) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

10.50 $\int_0^{0,1} \frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{x}dx$. 10.6) $\int_0^{1} \frac{\ln(1+x/5)}{x}dx$.

10.7) $\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$. 10.8) $\int_0^{0,2} \mathrm{e}^{-3x^2}\,dx$.

10.9) $\int_0^{0,2} \sin(25x^2)\,dx$. 10.10) $\int_0^{0,5} \cos(4x^2)\,dx$.

10.11) $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$. 10.12) $\int_0^{0,2} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}dx$.

10.13) $\int\limits_0^{0,4} \frac{\ln(1+x/2)}{x} dx$.

10.14) $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$.

10.15) $\int\limits_0^{0,3} \mathrm{e}^{-2x^2}\, dx$.

10.16) $\int\limits_0^{0,4} \sin(5x/2)^2\, dx$.

10.17) $\int\limits_0^{0,2} \cos\left(25x^2\right) dx$.

10.18) $\int\limits_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$.

10.19) $\int\limits_0^{0,4} \frac{1-\mathrm{e}^{-x/2}}{x} dx$.

10.20) $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx$.

10.21) $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$.

10.22) $\int\limits_0^{0,4} \mathrm{e}^{-3x^2/4}\, dx$.

10.23) $\int\limits_0^{0,5} \sin\left(4x^2\right) dx$.

10.24) $\int\limits_0^{0,4} \cos(5x/2)^2\, dx$.

10.25) $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}$.

10.26) $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

10.27) $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}$.

10.28) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$.

10.29) $\int\limits_0^{0,5} \mathrm{e}^{-3x^2/25}\, dx$.

10.30) $\int\limits_0^{1} \sin x^2 dx$.

10.31) $\int\limits_0^{0,1} \cos\left(100x^2\right) dx$.

Библиографический список

1. Очан, Ю. С. Математический анализ [Текст] : учеб. пособие для пед. институтов / Ю. С. Очан, В. Е. Шнейдер. – М. : учеб.-пед. изд-во министерства просвещения РСФСР, 1961. – 880 с.
2. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа [Текст] : учеб. пособие для вузов / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 384 с.
3. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике [Текст] : учеб. пособие для втузов / Л. А. Кузнецов. – М. : Высшая школа, 1983. – 175 с.
4. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике [Текст] : учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. – 5-е изд., стер. – СПб.:Изд-во «Лань», 2005. – 240 с.
5. Виноградова, И. А. Математический анализ в задачах и упражнениях (числовые и функциональные ряды) [Текст] : учеб. пособие И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. – М. : изд-во Факториал, 1996. – 477 с.
6. Шипачев, В. С. Задачник по высшей математике [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. С. Шипачев. – 3-е изд., стер. – М. : Высш. школа, 2003. – 304 с.
7. Шипачев, В. С. Курс высшей математики [Текст] : учеб. / В.С. Шипачев. – 2-е изд. М. : «Проспект», 2004. – 600 с.
8. Высшая математика для экономистов [Текст] : учебник / под ред. Н. Ш. Кремера. – 3-е изд. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с.
9. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] : учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович. – М. : ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2005. – 558 с.
10. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для втузов [Текст] / А. В. Ефимов, Б. П. Демидович. - М. : Изд. «Наука», 1981. - 463 с.

11. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике [Текст] / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 3-е изд., испр. и доп. – М. : Айрис-пресс, 2004. – 576 с.
12. Общий курс высшей математики для экономистов [Текст] : учебник / под ред. В. И. Ермакова. – М.: «Инфра-М», 2002. – 656 с.
13. Смирнов, В. И. Курс высшей математики [Текст] : учеб. / В. И. Смирнов. – М. : Гос. изд-во тех.-теоретической лит-ры, 1957. – 480 с.

ИЗААК ДМИТРИЙ ДАВИДОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. РЯДЫ
Учебно-методическое пособие
для студентов обучающихся по направлениям
140100 «Теплоэнергетика и теплотехника»;
140400 «Электроэнергетика и электротехника»;
150400 «Металлургия»;
151000 «Технологические машины и оборудование»;
240100 «Химическая технология»

Подписано в печать 22.10.2014		
Формат 60x90 $^1/_{16}$	Печать офсетная	Уч.-изд.л. 4,6
Рег.№ 49	Тираж 50 экз.	

Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»
Новотроицкий филиал
462359, Оренбургская обл., г. Новотроицк, ул. Фрунзе, 8.
E-mail: nfmisis@yandex.ru